Enric Nart
Xavier Xarles

Apunts d'àlgebra lineal

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona
Servei de Publicacions
Bellaterra, 2016

Primera edició: setembre de 2016

Edició i impressió:
Universitat Autònoma de Barcelona
Servei de Publicacions
Edifici A. 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès). Spain
Tel. 93 581 10 22. Fax 93 581 32 39
sp@uab.cat
http://publicacions.uab.cat

Imprès a Espanya. Printed in Spain

Dipòsit legal: B. 20.647-2016
ISBN 978-84-490-6632-0

ÍNDEX

1. Nombres complexos

1.1 Conjunts i aplicacions entre conjunts 7
1.2 Cossos. Polinomis 11
1.3 Construcció de $\mathbb{C}$ com a ampliació dels nombres reals 15
1.4 Forma polar d'un nombre complex 17
1.5 Arrels de polinomis complexos 19

2. Matrius

2.1 Operacions amb matrius 25
2.2 Matrius invertibles 30
2.3 Transformacions elementals de matrius 34
2.4 Rang d'una matriu. Criteri d'invertibilitat 41
2.5 Resolució de sistemes d'equacions lineals 45
2.6 Determinant d'una matriu quadrada 51

3. Espais vectorials i aplicacions lineals

3.1 Definició d'espai vectorial i exemples 59
3.2 Subespais vectorials 61
3.3 Definició d'aplicació lineal i exemples 67
3.4 Nucli i imatge d'una aplicació lineal. Isomorfismes 70
3.5 Independència lineal de famílies de vectors 74
3.6 Bases i coordenació d'espais vectorials. 76
3.7 Dimensió i rang. 80
3.8 Matrius de canvi de base 88
3.9 Matriu associada a una aplicació lineal respecte de bases fixades als espais de sortida i arribada 90
3.10 Suma directa. Subespais complementaris 96
3.11 Resolució de problemes bàsics 101

4. Diagonalització

4.1 Vectors propis i valors propis d'un endomorfisme 111
4.2 Diagonalització d'endomorfismes 114
4.3 Aplicacions de la diagonalització 117
4.4 Diagonalització de matrius reals simètriques 122
4.5 Diagonalització de matrius hermitianes 128

ÍNDEX DE TALLERS

Taller 1. Nombres complexos 22

Taller 2. Operacions amb matrius 32

Taller 3. Transformacions elementals de matrius 43

Taller 4. Resolució de sistemes d'equacions lineals 49

Taller 5. Subespais vectorials i generadors 65

Taller 6. Aplicacions lineals 72

Taller 7. Bases i dimensió 84

Taller 8. Matriu d'una aplicació lineal 94

Taller 9. Suma i intersecció de subespais 100

Taller 10. Diagonalització 120

Taller 11. Ortogonalitat i teorema espectral 126

Presentació

L'àlgebra lineal és la disciplina matemàtica que estudia els fenòmens lineals, en qualsevol àmbit on es produeixen. La *linealitat* és la capacitat que tenen alguns objectes de ser sumats i/o magnificats per nombres. En diverses àrees científiques, s'empren objectes que gaudeixen d'aquesta capacitat, i les seves interaccions mútues s'acostumen a reflectir en equacions lineals, com ara:

$$2\,x - \frac{1}{11}\,y + \sqrt{5}\,z = 0.$$

Al batxillerat s'estudien equacions lineals com aquesta, on les lletres x, y, z representen nombres-incògnita que es volen determinar. En aquest curs, aspirem a controlar els fenòmens lineals en tota la seva extensió, de manera que estudiarem equacions lineals on els símbols x, y, z podran designar objectes molt diversos: nombres, matrius, polinomis, funcions, les cel·les de memòria d'un ordinador, etc. Aquesta aspiració ens fa distingir dos nivells ben diferenciats en el contingut del curs. En una primera part, d'unes sis setmanes de durada, introduïm els nombres complexos i revisem a fons la problemàtica que envolta la resolució de sistemes d'equacions lineals clàssics. En aquest darrer tema es treballa a un nivell de màxima concreció i en són protagonistes exclusives les matrius i diferents tècniques per manipular-les: operacions amb matrius, inversió, esglaonament, forma normal de Gauss-Jordan, càlcul de rangs i determinants, etc. Aquestes tècniques s'utilitzen constantment al llarg de tot el curs i en constitueixen el fonament bàsic.

En una segona part, d'unes vuit setmanes de durada, es fa un salt considerable d'abstracció i es passen a estudiar els espais vectorials i les aplicacions lineals, que són els conceptes que millor modelitzen els fenòmens lineals. Un dels objectius prioritaris d'aquesta part és fer adquirir a l'alumne la capacitat de viatjar, en les dues direccions, entre els nivells concret-abstracte que s'hauran treballat. D'una banda, l'elecció d'una base d'un espai vectorial permet assignar coordenades als seus vectors i amb això es pot traduir qualsevol problema lineal abstracte a un problema numèric sobre matrius i sistemes d'equacions lineals. Un cop feta aquesta traducció, el problema es pot resoldre amb les tècniques estudiades a la primera part del curs.

En l'altre sentit, certes qüestions pràctiques sobre matrius o sistemes d'equacions lineals es comprenen d'una manera més profunda quan es contemplen amb les ulleres dels espais vectorials posades. Sovint, això permet un domini més

robust d'aquestes qüestions, que ens porta a la seva completa resolució. Per exemple, la maquinària abstracta dels espais vectorials i les aplicacions lineals s'utilitza al darrer capítol de les notes per obtenir tècniques de diagonalització de matrius, rellevants per les seves aplicacions en molts processos científics i tecnològics.

Aquestes notes estan basades en el contingut dels programes de l'assignatura semestral *Àlgebra*, de les titulacions d'Enginyeria Informàtica, Enginyeria Química, Enginyeria de Sistemes de Telecomunicació i Enginyeria Electrònica de Telecomunicació, de l'Escola d'Enginyeria de la UAB. Són fruit de la nostra experiència impartint aquest curs al llarg d'uns quants anys. Hem d'agrair als alumnes que han seguit aquests cursos la seva atenció, la seva activa participació a les classes i els seus comentaris, que ens han permès anar perfilant el contingut de les notes per adaptar-les millor a les seves necessitats.

Les notes contenen una col·lecció de 100 *Exercicis* proposats, distribuïts al llarg de tots els temes, i una col·lecció de 11 *Tallers*. L'objectiu primari dels tallers és practicar els aspectes més bàsics i rutinaris del conceptes i tècniques estudiades, per tal de facilitar a l'estudiant armes i bagatge per afrontar amb èxit els exercicis proposats, que són un model del veritable nivell d'exigència del curs.

Entre tots els tallers s'ofereixen 37 tasques bàsiques d'àlgebra lineal, completament desenvolupades. Per a un lector no directament implicat en els objectius acadèmics del curs, els tallers poden ser considerats com un ventall ampli i representatiu d'exercicis bàsics resolts.

Finalment, agraïm a Joan Josep Carmona els seus comentaris i suggeriments sobre una versió preliminar d'aquestes notes, que ens han permès millorar el text en diversos punts.

Bellaterra, juliol de 2016

1 Nombres complexos

1.1 Conjunts i aplicacions entre conjunts

Es pot imaginar un *conjunt* com una col·lecció qualsevol d'objectes, que anomenem genèricament *elements*.

Recordem alguns conjunts bàsics, que tenen notacions fixades:

$\mathbb{N}$ conjunt dels nombres naturals, $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$\mathbb{Z}$ conjunt dels nombres enters,

$\mathbb{Q}$ conjunt dels nombres racionals,

$\mathbb{R}$ conjunt dels nombres reals.

La relació de *pertinença* és bàsica per identificar els conjunts. Si X és un conjunt i x és un element de X, escrivim $x \in X$ i diem que "x pertany a X" o que "X conté x". Si x no pertany a X, escrivim $x \notin X$.

Un conjunt Y és un *subconjunt* d'un conjunt X si tot element de Y pertany a X. En aquest cas, escriurem $Y \subset X$, o també $X \supset Y$. Per exemple,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

El conjunt que no conté cap element s'anomena *conjunt buit* i es representa pel símbol $\emptyset$. Fixeu-vos que $\emptyset \subset X$ per a qualsevol conjunt X.

Dos conjunts X i Y són iguals si tenen els mateixos elements. En altres paraules,

$$X = Y \iff X \subset Y \text{ i } Y \subset X.$$

Sovint s'utilitzen les claus per delimitar els elements d'un conjunt. Per exemple, $X = \{1, 2, 3\}$. L'ordre en el qual s'escriuen els elements és indiferent. També podem descriure un conjunt per alguna propietat característica, com ara:

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 > 0\}.$$

Un conjunt X és *finit* si conté un nombre finit d'elements. En aquest cas, denotem per $|X|$ el nombre d'elements del conjunt.

Definició. *Siguin S, T subconjunts d'un conjunt X. Definim els subconjunts* unió *i* intersecció *de S i T per les condicions següents, respectivament:*

$$S \cup T = \{x \in X \mid x \in S \text{ o } x \in T\}, \qquad S \cap T = \{x \in X \mid x \in S \text{ i } x \in T\}.$$

Definició. *Donats dos conjunts X, Y, definim el seu* producte cartesià *com el conjunt de parelles ordenades d'un element de cada conjunt:*

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Podem considerar, de manera anàloga, el producte cartesià $X \times Y \times \cdots \times Z$ de diversos conjunts.

El producte cartesià d'un conjunt amb ell mateix n vegades es denota:

$$X^n = X \times \cdots \times X = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in X\}.$$

Aplicacions entre conjunts

Definició. *Una* aplicació *entre dos conjunts X, Y és una llei que assigna a cada element del conjunt X un element del conjunt Y.*

Es diu que X és el conjunt de sortida *i Y el* conjunt d'arribada.

Una aplicació entre X i Y s'acostuma a denotar

$$f\colon X \longrightarrow Y, \qquad \text{o també} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Per a cada element $x \in X$, denotem per $y = f(x)$ l'element $y \in Y$ que l'aplicació f assigna a x. Es diu que y és la *imatge* de x per l'aplicació f.

Per exemple, per als conjunts $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{\diamond, \bullet, \star\}$, les següents assignacions determinen una aplicació $f\colon X \longrightarrow Y$:

$$\begin{array}{ccc} a & \mapsto & \star \\ b & \mapsto & \bullet \\ c & \mapsto & \star \\ d & \mapsto & \star \end{array} \tag{1.1}$$

Tenim: $f(a) = \star$, $f(b) = \bullet$, $f(c) = \star$, $f(d) = \star$.

Sovint, en comptes de donar la llista de les imatges dels elements del conjunt de sortida, es descriu l'aplicació f mitjançant alguna llei genèrica. Per exemple,

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto 7x. \tag{1.2}$$

Recalquem que per tenir una aplicació $f\colon X \longrightarrow Y$, *tots* els elements del conjunt X han de tenir *una* (i només una) imatge en el conjunt Y. Per exemple, denotant per log el logaritme neperià, la llei:

$$x \mapsto \log x,$$

no determina una aplicació $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ja que no tots els nombres reals tenen logaritme. Si denotem per $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ la semirecta dels nombres reals positius, aleshores sí que té sentit considerar l'aplicació:

$$\log\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log(x). \tag{1.3}$$

Tampoc podríem definir una aplicació $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mitjançant la llei:

$$x \mapsto y \ \text{ tal, que } \ y^2 = x,$$

perquè un mateix nombre real positiu té dues imatges; per exemple, $4 \mapsto 2, -2$. Per arreglar-ho, podem quedar-nos només amb la imatge positiva. Obtenim aleshores una aplicació ben definida:

$$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sqrt{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \tag{1.4}$$

Com que les imatges d'aquesta aplicació són sempre nombres reals positius, també podem considerar una aplicació:

$$h\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \qquad h(x) = \sqrt{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \tag{1.5}$$

on només hem canviat el conjunt d'arribada. Obtenim dues aplicacions g i h diferents, ja que tenen propietats diferents. Per exemple, amb la terminologia que introduirem més endavant, h és bijectiva i en canvi g no ho és.

Imatges i antiimatges de subconjunts

Imaginem que $f\colon X \longrightarrow Y$ és una aplicació entre els conjunts X i Y.

Per a cada subconjunt $F \subset X$, definim la seva *imatge per* f, denotada $f(F)$, com el subconjunt de Y que formen totes les imatges per f dels elements de F:

$$f(F) = \{f(x) \mid x \in F\} = \{y \in Y \mid \exists x \in F \text{ amb } f(x) = y\} \subset Y.$$

Per a cada subconjunt $H \subset Y$ definim la seva *antiimatge per* f, denotada $f^{-1}(H)$, com el subconjunt de X format pels elements amb imatge a H:

$$f^{-1}(H) = \{x \in X \mid f(x) \in H\} \subset X.$$

Si $y \in Y$, s'acostuma a escriure $f^{-1}(y)$ en comptes de $f^{-1}(\{y\})$, però cal no oblidar que $f^{-1}(y)$ és un subconjunt de X i no pas un element de X.

Per exemple, per a l'aplicació f de (1.1) tenim:

$$\begin{aligned}
&f(X) = f(\{a,\, b\}) = \{\bullet,\, \star\}, && f(\{c\}) = f(\{a,\, c,\, d\}) = \{\star\},\\
&f^{-1}(Y) = f^{-1}(\{\bullet,\, \star\}) = X, && f^{-1}(\bullet) = f^{-1}(\{\bullet,\, \diamond\}) = \{b\},\\
&f^{-1}(\star) = \{a,\, c,\, d\}, && f^{-1}(\diamond) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Composició d'aplicacions

Considerem tres conjunts X, Y, Z i dues aplicacions: $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$. L'aplicació *composició* de f i g, és l'aplicació:

$$g \circ f\colon X \longrightarrow Z, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in X.$$

Per exemple, siguin X, Y, f com a l'exemple (1.1). Considerem el conjunt $Z = \{5,\, 7,\, 9\}$ i l'aplicació $g\colon Y \longrightarrow Z$ determinada per:

$$g(\diamond) = 7, \quad g(\bullet) = 7, \quad g(\star) = 9. \tag{1.6}$$

Aleshores l'aplicació composició $g \circ f$ envia:

$$\begin{array}{lccc}
f\colon & X & \longrightarrow & Y\\
 & a & \mapsto & \star\\
 & b & \mapsto & \bullet\\
 & c & \mapsto & \star\\
 & d & \mapsto & \star
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccc}
g\colon & Y & \longrightarrow & Z\\
 & \diamond & \mapsto & 7\\
 & \bullet & \mapsto & 7\\
 & \star & \mapsto & 9,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccc}
g \circ f\colon & X & \longrightarrow & Z\\
 & a & \mapsto & 9\\
 & b & \mapsto & 7\\
 & c & \mapsto & 9\\
 & d & \mapsto & 9
\end{array}$$

Aplicacions exhaustives, injectives i bijectives

Una aplicació $f\colon X \longrightarrow Y$ és *exhaustiva* si $f(X) = Y$. En altres paraules, si tot element de Y és imatge d'algun element de X.

Per exemple, les aplicacions (1.2), (1.3) i (1.5) són exhaustives, mentre que les aplicacions (1.1), (1.4) i (1.6) no ho són.